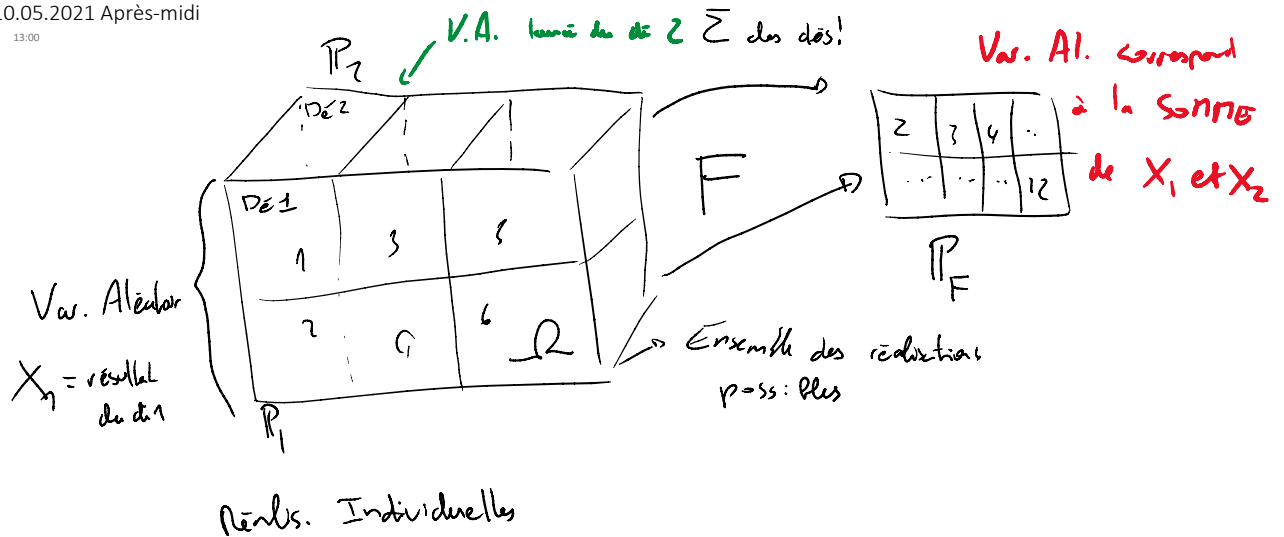




$$X_1 \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad P_1(x) = \frac{1}{6} \quad x \in X_1$$

$$X_2 \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad P_2(x) = \frac{1}{6} \quad x \in X_2$$

$$Y = X_1 + X_2 \Rightarrow y_i = x_1 + x_2 \in \{2, \dots, 12\}$$

$F(x_1, x_2) \quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$

Variable aléatoire : elle décrit les valeurs possibles (univers Ω)
Elle suit une loi de probabilité (fonction P)

$$X \sim \text{loi uniforme} \quad \Omega_X = \{1, 2, \dots, 6\}$$

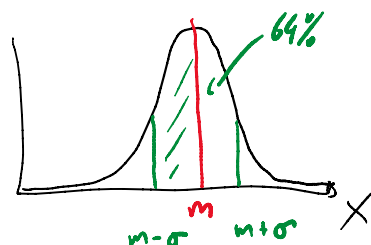
$$\hookrightarrow P(x \in X) = \frac{1}{6}$$

Loi uniforme :



$$\sum_{x \in X} P(x) = 1$$

**Loi normale :
(gaussienne)**



$$\sum_x P(x) = 1 \quad \text{discret}$$

$$\int_{x \in \Omega} P(x) dx = 1$$

Loi de Poisson, Exponentielle, Binomiale, Bernouilli



$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

$Y = X_1 + X_2 \Rightarrow$ plus uniforme !

$$P_Y(x_1 + x_2) \stackrel{?}{=} P_1(x_1) + P_2(x_2) \quad \text{cl. s. 19}$$

$$\Rightarrow \sum_{y \in Y} P_Y(y) \stackrel{?}{=} \sum_{x_1 \in X_1} P_1(x_1) + \sum_{x_2 \in X_2} P_2(x_2)$$

$$P_Y(2) \stackrel{?}{=} \frac{1}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \quad ?$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

$$P_Y(12) \stackrel{\text{si 19}}{=} \frac{1}{36} = P_1(6) \cdot P_2(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

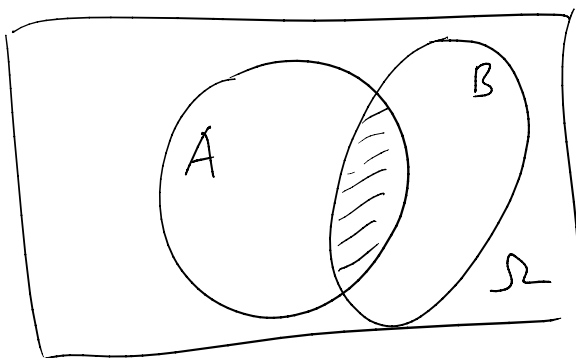
$$P_Y(7) \stackrel{\text{si 19}}{=} \frac{6}{36} = [P_1(1) \cdot P_2(6) + P_1(2) \cdot P_2(5) + \dots] = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36} = \frac{6}{36}$$

$Z =$
 $12X_1 + 1 \cdot X_2$

$\Omega = \{1, 12, \dots, 16, 2, 11, \dots, 26, 3, 1, \dots, 36, \dots, 66\}$

$$\begin{cases} 1+6 \leftarrow P_1(1) \cdot P_2(6) \\ 2+5 \leftarrow \vdots \\ 4+3 \leftarrow \vdots \\ 3+4 \leftarrow \vdots \\ 5+2 \leftarrow \vdots \\ 6+1 \leftarrow \vdots \end{cases}$$

Si: $A \subseteq \Omega$ alors $P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$

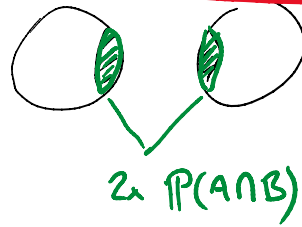


Si $A \cap B = \emptyset$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Si $A \cap B = \emptyset$ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Dans le cas général :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$\Omega \setminus A$



Si $A \subseteq \Omega$ que vaut $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$

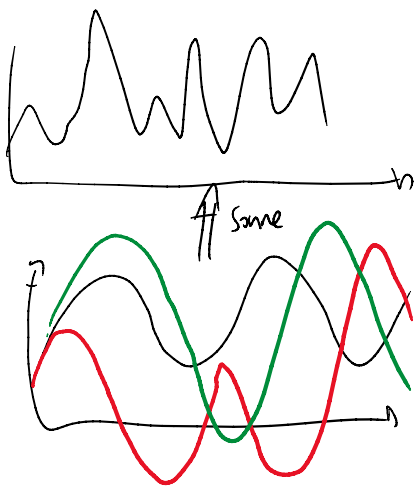
$\mathbb{P} \text{ univers}$ $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(x)$ $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$	var. aléatoires $X_1, X_2 \text{ uniformes}$ $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$
--	---

1 seule loi $\rightarrow$

$$= X_1 \cdot X_2$$

$$= X_1^{\log(\frac{X_2}{2\pi})}$$

Comb. diverses lois



Appren. cette loi "spéciale"
par comb. de lois connues

Pièce de Monnaie: On lance N fois la pièce ($N=2, 3$)

$$\mathbb{P}(\text{pile}) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(\text{face}) = \frac{1}{3}$$

Comment va se comporter la loi de probabilité pour N lancers consécutifs.

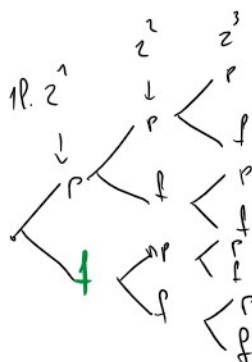
Est-ce que les lancers sont "indépendants" => oui ils sont indépendants (un lancer n'influence pas le résultat du suivant) !

On s'intéresse à la SEQUENCE des résultats obtenus. L'ordre IMPORTE P-F-F n'est PAS le même résultat que F-P-F !!!

A quoi ressemble la fonction de probabilité pour 2 lancers ?

$$\Omega = \{P-P, P-f, f-P, f-f\} \quad (\# = 2^2 \text{ poss.})$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{l} \frac{2}{3} P \leftarrow P(P) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = P(P) \times P(P) = \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} f \leftarrow P(f) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} P \leftarrow P(P) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} f \leftarrow P(f) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{array} \end{array} \right\} \sum \frac{4+2+2+1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

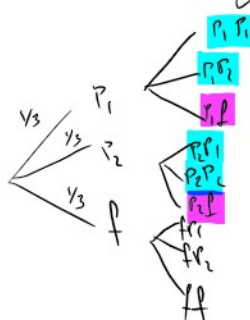


$$A = \{P_1\} \cup \{P_2\}$$

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(A)$$

9 cas de prob. 1/9

$$\begin{aligned} P(P_1) &= \frac{1}{3} \\ P(P_2) &= \frac{1}{3} \\ P(f) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$P(P) = P(P_1P_2) + P(P_2P_1) + P(P_1P_1) + P(P_2P_2) = \frac{4}{9}$$

$$P(Pf) = \frac{2}{9}$$

$$P(fP) = \frac{2}{9}$$

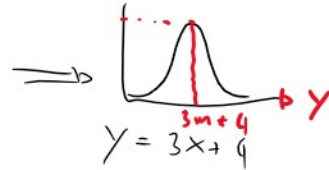
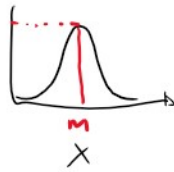
$$P(ff) = \frac{1}{9}$$

V.A. X faire plusieurs lancers de X



$$Y = X_1 + X_2 + X_3 \dots \Rightarrow P(x_1, x_2, x_3, \dots) = P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot P(x_3)$$

$$Y = 3 \cdot X + 4$$



Définissons Y comme le nombre de fois qu'on fait pile sur 3 lancés !

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 \quad \text{ou} \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \text{ est pile} \\ 0 & \text{si } X_i \text{ est face} \end{cases}$$

$$\Omega = \{3, 2, 1, 0\}$$

$$P(3p) = 1 \cdot P(p) \cdot P(p) \cdot P(p) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

$$P(2p) = 3 \cdot P(p) \cdot P(p) \cdot P(f) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$$

3 permutations 2 piles
p p f p f p f p p

$$P(1p) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{27} \right) = \frac{6}{27}$$

$$P(0p) = 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = 1 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

$$\frac{15}{27} \quad \frac{12}{27} \quad \frac{1}{27}$$

